

# Bundeswettbewerb Mathematik 2009

Der Bundeswettbewerb Mathematik ist eine Initiative des Stifterverbandes für die Deutsche Wissenschaft. Er wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und vom Stifterverband unter Beteiligung der Länder. Träger ist der Verein Bildung und Begabung e.V.

## Die Aufgaben der ersten Runde 2009

### Aufgabe 1

Bei der 202-stelligen Quadratzahl  $\underbrace{9 \dots 9}_{100 \text{ Neunen}} z \underbrace{0 \dots 0}_{100 \text{ Nullen}} 09$  ist die Ziffer  $z$  an der 102-ten Dezimalstelle von rechts nicht lesbar.

Ermittle eine mögliche Ziffer, die dort stehen kann!

### Aufgabe 2

Zu zwei positiven reellen Zahlen  $a$  und  $b$  sei  $m(a,b)$  die kleinste der drei Zahlen  $a$ ,  $\frac{1}{b}$  und  $\frac{1}{a} + b$ .

Für welche Zahlenpaare  $(a,b)$  ist  $m(a,b)$  maximal?

### Anmerkung:

In den Aufgaben 1 und 2 ist die Richtigkeit des Resultats zu beweisen.

### Aufgabe 3

Ein Punkt  $P$  im Innern des Dreiecks  $ABC$  wird an den Mittelpunkten der Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  gespiegelt; die Bildpunkte werden mit  $P_a$ ,  $P_b$  bzw.  $P_c$  bezeichnet.

Beweise, dass sich die Geraden  $AP_a$ ,  $BP_b$  und  $CP_c$  in einem gemeinsamen Punkt schneiden!

### Aufgabe 4

Eine positive ganze Zahl heiße *Dezimal-Palindrom*, wenn ihre Dezimaldarstellung  $z_n \dots z_0$  mit  $z_n \neq 0$  spiegelsymmetrisch ist, d.h., wenn  $z_k = z_{n-k}$  für alle  $k = 0, \dots, n$  gilt.

Zeige, dass jede nicht durch 10 teilbare ganze Zahl ein positives Vielfaches besitzt, das ein Dezimal-Palindrom ist!

Bitte beide Coupons in Druckschrift vollständig und ohne Abkürzungen ausfüllen; den **Teilnahmecoupon** oben links auf die Rückseite des Umschlags (Verschluss rechts) aufkleben, den **EDV-Coupon** in den Umschlag legen. Bei **Gruppenarbeit** bitte auf dem Teilnahmecoupon ein Gruppenmitglied als Kontaktperson angeben und für jedes Gruppenmitglied einen **eigenen EDV-Coupon** beifügen. Mit der Teilnahme wird einer Speicherung der Daten zugestimmt.



#### Teilnahmecoupon 2009

ABSENDER:

Name  Vorname  geb. am

Straße / Nr.  PLZ / Ort

Tel.  Bundesland

Derzeitige Klassen- oder Jahrgangsstufe   Männl.\*  Weibl.\* \* Zureifeendes bitte ankreuzen!

Die eingereichte Arbeit umfasst  Seiten  Gruppenarbeit\*

Bearbeitete Aufgaben  Aufgabe 1\*  Aufgabe 2\*  Aufgabe 3\*  Aufgabe 4\*

**Selbstständigkeitserklärung:** Ich versichere, dass ich/die Gruppe alle beigefügten Lösungen selbstständig gefunden und ausgearbeitet habe/hat.

Datum  Unterschrift

**Anschrift der Schule:**

Name

Straße / Nr.

PLZ / Ort  Bundesland



#### EDV-Coupon 2009

ABSENDER:

Name  Vorname  geb. am

Straße / Nr.  PLZ / Ort

Tel.  Bundesland

Derzeitige Klassen- oder Jahrgangsstufe   Männl.\*  Weibl.\* \* Zureifeendes bitte ankreuzen!

Die eingereichte Arbeit umfasst  Seiten  Gruppenarbeit\*

Bearbeitete Aufgaben  Aufgabe 1\*  Aufgabe 2\*  Aufgabe 3\*  Aufgabe 4\*

**Anschrift der Schule:**

Name

Straße / Nr.

PLZ / Ort  Bundesland

# Teilnahmebedingungen im Überblick

• An der **1. Runde** des Bundeswettbewerbs Mathematik können sich Schüler/innen an Schulen in der Bundesrepublik Deutschland und deutschen Auslandsschulen, die zur allgemeinen Hochschulreife führen, beteiligen. Es sind Einzel- und Gruppenarbeiten zugelassen, die die Lösung zu mindestens einer der vier Aufgaben enthalten müssen. Maximal drei Teilnehmer/innen dürfen sich zu einer **Gruppe** zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Gruppenarbeiten durchlaufen wie Einzelarbeiten regulär das Korrekturverfahren. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe einzeln die Teilnahmeberechtigung für die 2. Runde. Ein **Preis** wird in der 1. Runde vergeben, wenn mindestens drei der vier Aufgaben richtig gelöst wurden.

Die auf dem Teilnahmecoupon abgedruckte **Selbstständigkeitserklärung** muss von Ihnen unterschrieben sein, bei Gruppen von der Kontaktperson (s.u.). Die Selbstständigkeitsverpflichtung bezieht sich dabei bereits auf die Phase der Lösungsfindung und nicht erst auf die endgültige Formulierung. Insbesondere sind Diskussionen von Lösungswegen im Internet nicht zulässig. Ein begründeter Verdacht auf Verstoß gegen diese Verpflichtung führt zum Ausschluss vom Wettbewerb.

• Für die **2. Runde** sind alle Preisträger/innen der 1. Runde (bei preiswürdigen Gruppenarbeiten alle Gruppenteilnehmer/innen einzeln) teilnahmeberechtigt. Es sind in dieser Runde nur *Einzelarbeiten* zugelassen, die Lösungen zu mindestens drei der vier Aufgaben enthalten.

• Für die **3. Runde** haben sich die 1. Preisträger/innen der 2. Runde qualifiziert.

• Die von der Korrekturkommission getroffene Entscheidung ist endgültig („Schiedsrichterent-

scheidung“). Der Rechtsweg ist in allen drei Runden ausgeschlossen.

## Wichtige Hinweise

• Bei der Darstellung der Lösung müssen alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet werden. Dabei kommt es entscheidend auf die logische Vollständigkeit an. Eine glatte Korrektur der Arbeit soll ohne Anfertigung zusätzlicher Skizzen und ohne Ergänzungen von Umformungsschritten möglich sein. Bitte geben Sie benutzte Hilfsmittel (Literatur etc.) an.

Umständliche und unnötig breite Ausführungen sowie Beweise und Überlegungen, die zur Lösung der gestellten Aufgabe nicht erforderlich sind, wirken sich negativ auf die Bewertung aus. Dies gilt auch für unverlangte Verallgemeinerungen, sofern sie zu einem erheblichen Mehraufwand in der Darstellung führen oder unangemessen anspruchsvolle mathematische Hilfsmittel benötigen. Derartige Ausführungen können allenfalls, ebenso wie Alternativlösungen, in einem Anhang, der keinen Einfluss auf die Bewertung hat, der Arbeit beigelegt werden.

Schwer lesbare Arbeiten können von der Bewertung ausgeschlossen werden. Es sollte auch vermieden werden, mathematische oder logische Symbole unnötig zu häufen, wenn dadurch die Lesbarkeit der Arbeit wesentlich eingeschränkt wird.

• Gegen die Verwendung eines Computers oder eines Taschenrechners als Hilfsmittel zur Ideenfindung bzw. Rechnungskontrolle ist nichts einzuwenden, doch müssen die für den jeweiligen Nachweis wesentlichen Schritte und Resultate ohne diese Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sein.

• Schreiben Sie die Lösungen bitte gut lesbar und ohne Verwendung der Farben Rot und Grün (diese

sind für die Korrektur reserviert) auf Blätter des Formats DIN A4 und lassen Sie links einen 6 cm breiten Rand frei. Ihre Lösungen sollten nach Möglichkeit maschinengeschrieben sein. Bitte nummerieren Sie alle Blätter durch und versehen sie oben rechts mit Ihrem Namen. Alle Blätter sollen nur einseitig beschrieben werden. Senden Sie die Arbeit in einem Briefumschlag des Formats DIN C4, auf dessen Rückseite oben links (Verschluss rechts) der vollständig ausgefüllte Teilnahmecoupon aufgeklebt ist, an die unten angegebene Adresse. Den EDV-Coupon bitte ausgefüllt in den Umschlag legen. **Gruppen** geben auf dem Teilnahmecoupon ein Gruppenmitglied als Kontaktperson an und fügen für jedes Gruppenmitglied einen eigenen EDV-Coupon bei.

• Die eingereichten Arbeiten gehen in das Eigentum des Wettbewerbs über und werden nicht zurückgesandt. Es wird deshalb empfohlen, eine Kopie zu behalten. Diese kann bei Unklarheiten zusammen mit den Lösungsbeispielen mit dem Fachlehrer/der Fachlehrerin durchgesehen werden.

• **Einsendeschluss** für die 1. Runde ist der **1. März 2009** (Datum des Poststempels). Verspätet abgesandte Arbeiten können nicht in das Korrekturverfahren einbezogen werden. *Einsendungen auf elektronischem Wege* sind nicht möglich. Über das Ergebnis werden alle Teilnehmer/innen im Juni 2009 informiert. Wer wissen möchte, ob seine Einsendung angekommen ist, kann ihr eine frankierte und an ihn selbst adressierte Postkarte beilegen. Senden Sie Ihre Bearbeitungen bitte ausreichend frankiert an:

**Bundeswettbewerb Mathematik  
Wissenschaftszentrum  
Postfach 20 14 48  
53144 Bonn**

## Lösungsbeispiel – Aufgabe 1 der 1. Runde 2008

Fritz hat mit Streichhölzern gleicher Länge die Seiten eines Parallelogramms gelegt, dessen Ecken nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er stellt fest, dass in die Diagonalen genau 7 bzw. 9 Streichhölzer passen.

Wie viele Streichhölzer bilden den Umfang des Parallelogramms?



Benjamin Hinrichs  
Klasse 10,  
Carl-Zeiss-Gymnasium,  
Jena

## Lösung von Benjamin Hinrichs

Der Umfang des Parallelogramms wird von 22 Streichhölzern gebildet.

### Beweis:

Nennen wir den Winkel  $|\angle BAD| = |\angle DCB| = \alpha$  und die Seiten  $|AB| = |CD| = a$ ,  $|BC| = |AD| = b$ , wobei wir die Seitenlängen in Anzahlen von Streichhölzern messen. Die Diagonalen sind  $|AC| = 9$  und  $|BD| = 7$ . Dabei wissen wir, dass  $a, b \in \mathbb{N}^+$  da sie Anzahlen von Streichhölzern sind.

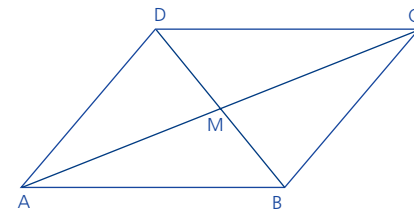
Nach dem Kosinussatz gilt in Dreieck  $ABD$ :  $7^2 = 49 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$

Und in Dreieck  $ABC$ :  $9^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) \Rightarrow 81 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ .

Addieren wir nun (1) und (2), so erhalten wir  $130 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow 65 = a^2 + b^2$ .

Aus Symmetriegründen können wir  $1 \leq a \leq b$  annehmen. Wegen  $a^2 + b^2 = 65$  und  $1 \leq a \leq b$  folgt dann  $b^2 \leq 64$  und  $b \leq 8$ , sowie  $2b^2 \geq a^2 + b^2 = 65$ , also  $b \geq 6$ . Für  $b = 6$  erhalten wir  $a^2 = 65 - b^2 = 29$ , was keine Quadratzahl ist. Für  $b = 8$  erhalten wir  $a^2 = 65 - b^2 = 1$ . Dies widerspricht der Dreiecksungleichung in  $\triangle ABC$  ( $a + b > 9$ ). Somit ist  $b = 7$ , woraus  $a^2 = 65 - b^2 = 16$  und  $a = 4$  folgt.

Für diese Seitenlängen ist die Dreiecksungleichung erfüllt und der Umfang entspricht  $2(4 + 7) = 22$  Streichhölzern.



## Übungsmaterial

Die Aufgaben und Lösungsbeispiele aus früheren Wettbewerbsläufen können kostenlos gegen Einsendung eines adressierten und ausreichend frankierten Umschlags (DIN C4) von der Geschäftsstelle bezogen werden.

### Bundeswettbewerb Mathematik

Ahrstr. 45 • 53175 Bonn

Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn

Tel.: (02 28) 9 59 15 - 20

E-Mail: [info@bundeswettbewerb-mathematik.de](mailto:info@bundeswettbewerb-mathematik.de)

[www.bundeswettbewerb-mathematik.de](http://www.bundeswettbewerb-mathematik.de)

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!