Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 1999

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Von n abgeschlossenen Intervallen der Zahlengerade ist bekannt, dass sich je zwei dieser Intervalle stets überschneiden.
Man beweise, dass es eine reelle Zahl gibt, die in allen Intervallen enthalten ist.

Aufgabe 2

Gegeben sind zwei Strecken AB und CD (nicht zwingend in einer Ebene) mit der gleichen Länge $2k$. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von AD und BC hat die Länge k.
Man berechne den Winkel der Geraden (AB) und (CD).

Aufgabe 3

Adele stellt fest, dass die um 1 vergrößerte Summe der Quadrate zweier von ihr gewählten positiven ganzen Zahlen durch deren Produkt teilbar ist.
Reichen diese Angaben zur Ermittlung des Quotienten? Die Antwort ist zu begründen!

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Es seien x, y und z reelle Zahlen mit den Eigenschaften
(1) $x + y + z = 11$ und
(2) $xy + yz + zx = 10$.
Man bestimme den größten Wert, den eine der drei Zahlen annehmen kann.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein nicht-gleichschenkliges Dreieck ABC. Seine Winkelhalbierende w_γ soll gleichzeitig den Winkel zwischen der Höhe h_c und der Seitenhalbierenden s_c halbieren.
Man beweise, dass dann das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

Aufgabe 3

Es ist zu beweisen, dass genau eine Folge ganzer Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ existiert, so dass $a_1 = 1$, $a_2 > 1$ ist und für alle $n \geq 1$ gilt: $a_{n+1}^3 + 1 = a_n \cdot a_{n+2}$.