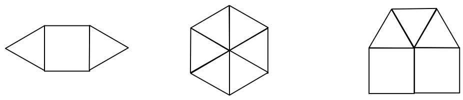
Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2000

Lösungen zur 1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Gegeben sei ein hinreichend großer Vorrat von gleichseitigen Dreiecken und Quadraten, alle mit der gleichen Seitenlänge. Aus diesen Bausteinen lassen sich konvexe* Polygone bilden, indem man sie in der Ebene lückenlos und überschneidungsfrei aneinander legt. (Die Figur zeigt drei Möglichkeiten für ein Sechseck.)



a) Welches ist die größtmögliche Anzahl m von Seitenkanten für ein so gebildetes konvexes Polygon? (Die Antwort ist zu begründen.)

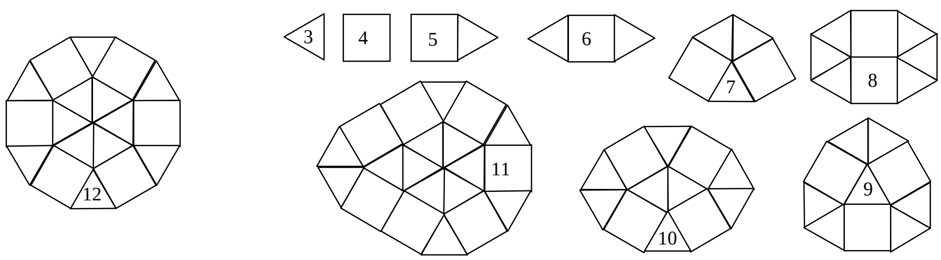
b) Man gebe für alle möglichen Anzahlen von Seitenkanten $\leq m$ jeweils ein Beispiel an.

*) Eine Figur heißt konvex, wenn für je zwei ihrer Punkte auch alle Punkte der Verbindungsstrecke zu der Figur gehören.

Lösung

a) Starten wir in einem beliebigen Eckpunkt eines konvexen Polygons und umrunden seinen Umfang, so drehen wir uns in jeder Ecke um einen bestimmten Winkel im gleichen Drehsinn. Die Summe dieser Winkel beträgt für einen vollen Umlauf 360°. Weil die Innenwinkel der hier betrachteten Polygone nur von gleichseitigen Dreiecken und Quadraten gebildet werden, ist ihre Größe - und damit die Größe der äußeren Drehwinkel - stets durch 30° teilbar. In jeder Ecke erfolgt also eine Drehung um mindestens 30°, so dass wegen $360° = 12 \cdot 30°$ das Polygon höchstens 12 Ecken und damit höchstens 12 Kanten besitzen kann. Die Existenz eines solchen Polygons mit 12 Kanten wird unter b) gezeigt.

b) Offensichtlich existiert kein Polygon mit weniger als 3 Seitenkanten. Für alle Kantenzahlen von 3 bis 12 ist nachfolgend das Polygon mit der kleinsten Anzahl von Bausteinen angegeben.



Aufgabe 2

Wir betrachten – mit 1 beginnend – alle positiven Teiler einer natürlichen Zahl n der Größe nach geordnet: $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < n$.

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit den Eigenschaften:

(1) $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$ und

(2) $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1$

Lösung

Mit jedem Teiler d ist auch die natürliche Zahl e mit $d \cdot e = n$ ein Teiler von n. Einsetzen in (1) liefert daher $n = \frac{n}{e_{13}} + \frac{n}{e_{14}} + \frac{n}{e_{15}}$ und weiter $1 = \frac{1}{e_{13}} + \frac{1}{e_{14}} + \frac{1}{e_{15}}$, wobei $e_{13} > e_{14} > e_{15} > 1$ gelten muss. Wäre $e_{15} \geq 3$, so wäre $\frac{1}{e_{13}} + \frac{1}{e_{14}} + \frac{1}{e_{15}} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1$, Widerspruch! Also ist

$e_{15} = 2$ und $\frac{1}{e_{13}} + \frac{1}{e_{14}} = \frac{1}{2}$. Wäre $e_{14} \geq 4$, so wäre $\frac{1}{e_{13}} + \frac{1}{e_{14}} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$, Widerspruch! Also ist $e_{14} = 3$ und damit $e_{13} = 6$. Es ist daher $d_{13} = \frac{n}{6}$, $d_{14} = \frac{n}{3}$ und $d_{15} = \frac{n}{2}$. Da d_{15} der größte von *n* verschiedene Teiler von *n* ist, hat *n* genau 16 Teiler und es ist $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 6$.

Aus (2) folgt nun $d_5^3 + 3d_5^2 + 3d_5 = \frac{n}{2} \Leftrightarrow 2d_5(d_5^2 + 3d_5 + 3) = n$. Wegen $3|n$ gilt entweder $3|d_5$ oder $3|(d_5^2 + 3d_5 + 3)$, woraus aber $3|d_5^2$ und daher ebenfalls $3|d_5$ folgt. Somit ist *n* sogar durch 9 teilbar. Damit gilt aber $d_5 = 9$, weil zwischen $d_4 = 6$ und dem nächsten Teiler 9 nur Zahlen liegen, die nicht durch 3 teilbar sind.
Dies in (2) eingesetzt liefert $1000 = d_{15} + 1$ und daher $n = 2d_{15} = 1998$. Diese Zahl erfüllt als einzige alle Bedingungen; sie besitzt die Teiler 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 162, 333, 666, 999 und 1998.

Aufgabe 3

Die natürlichen Zahlen von 1 bis n^2 werden zufällig auf die Felder eines $n \times n$-Quadrats verteilt ($n \geq 2$). Für jedes Paar von Zahlen innerhalb einer Reihe bzw. einer Spalte dividieren wir die größere durch die kleinere Zahl. Der kleinste dieser $n^2(n-1)$ Quotienten werde als *Charakteristik C* der zufälligen Anordnung bezeichnet.
Welches ist der größtmögliche Wert für *C* ? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

Der größtmögliche Wert für *C* in Abhängigkeit von *n* ist $\frac{n+1}{n}$. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

I) Für jede beliebige Anordnung gilt $C \leq \frac{n+1}{n}$: Von den $n+1$ Zahlen $n^2, n^2-1, \ldots, n^2-n$ liegen zwei in einer Zeile und ein anderes Paar in einer Spalte des Quadrats. Daher gibt es mit $0 \leq x < y \leq n$ ein von (n^2/n^2-n) verschiedenes Paar (n^2-x/n^2-y) in einer Reihe, so dass $C \leq \frac{n^2-x}{n^2-y} \leq \frac{n^2-1}{n^2-n} = \frac{n+1}{n}$. (Die zweite Ungleichung gilt, weil $y < n$ falls $x = 0$.)

II) Es gibt eine Anordnung mit $C = \frac{n+1}{n}$: Dazu schreiben wir in die erste Zeile nebeneinander die Zahlen n^2, n^2-n, n^2-2n, …, $n^2-(n-1)n = n$ und diagonal rechts unter jedes bereits ausgefüllte Feld die um 1 kleinere Zahl, wobei wir beim Überschreiten des rechten Randes in derselben Zeile ganz links fortfahren. Offensichtlich wird jede Zahl genau einmal eingetragen; die Zahlen einer Zeile haben jeweils die minimale Differenz *n* und die Zahlen einer Spalte die minimale Differenz $n-1$ (die Figur zeigt das Beispiel $n = 4$).

16	12	8	4
3	15	11	7
6	2	14	10
9	5	1	13

Der kleinste auftretende Quotient ist hier offenbar $\frac{n^2-1}{n^2-n} = \frac{n+1}{n}$, also gilt $C \geq \frac{n+1}{n}$. Damit ist alles gezeigt.