Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2001

Lösungen zur 1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

In einem Schritt kann man vom Punkt A(i | j | k), mit i, j k $\in$ {0, 1, 2, 3}, zu einem weiteren Punkt des Würfelgitters gelangen, indem man stets genau eine der Koordinaten um 1 vergrößert.
Man ermittle die Anzahl aller kürzesten Wege, die vom Ursprung O(0 | 0 | 0) in den Punkt P(3 | 3 | 3) führen.

Lösung

Um von O in P auf kürzestem Wege zu gelangen, werden genau 9 Schritte benötigt, jeweils drei Einheitsschritte in i–, j– und k– Richtung. Die Anzahl der Schritte ist demnach gleich mit der Anzahl der 9–stelligen Anordnungen der drei Zeichen i, j und k, in denen jedes dieser Zeichen genau 3 Mal vorkommt, also $9!/(3!)^3 = 1680$.

Aufgabe 2

Man beweise: Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gilt die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\frac{3}{2}\ .$$

Lösung

Für $x, y > 0$ gilt $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\ge 0$, was äquivalent zu $\frac{1}{\sqrt{xy}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ ist, wobei das Gleichheitszeichen genau dann zutrifft, wenn $x = y$ ist.
Angewendet auf die linke Seite der Ungleichung ergibt sich:

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le$$
$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right)=\frac{3}{2}$$

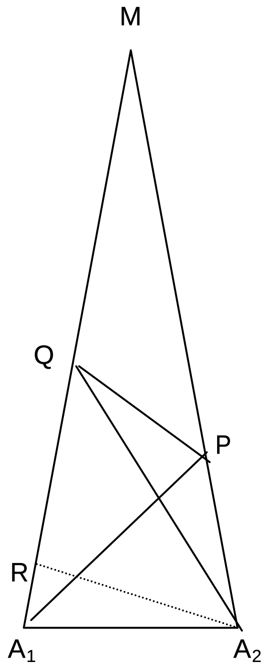
wobei das Gleichheitszeichen genau dann zutrifft, wenn $a + b = b + c = c + a$, also wenn $a = b = c$ ist.

Aufgabe 3

Im regulären 18–Eck $A_1A_2...A_{18}$ mit den Umkreismittelpunkt M ist P der Schnitt von A_1A_7 mit MA_2 und Q der Schnitt von A_2A_{13} mit MA_1.
Man berechne den Winkel $\angle MPQ$.

Lösung

Aus $\angle A_1MA_2 = 360°:18 = 20°$ und $MA_1 = MA_2$ folgt $\angle A_2A_1M = \angle MA_2A_1 = 80°$.
Weiterhin ist $\angle PA_1M = 30°$ und $\angle MA_2Q = 20°$, was unmittelbar aus dem Umfangswinkelsatz (Peripheriewinkelsatz) folgt.
Das Dreieck ΔA_1A_2P ist gleichschenklig, da einerseits $\angle PA_2A_1 = 80°$ und andererseits $\angle A_2A_1P = 80° - \angle PA_1M = 50°$, woraus $\angle A_1PA_2 = 50°$ folgt. Damit ist $A_1A_2 = A_2P$.



Sei nun R auf A_1M so gewählt, dass $A_1A_2 = A_2R$, also $\angle RA_2A_1 = 20°$ ist. Im Dreieck ΔRA_2P ist dann $A_2R = A_2P$ und $\angle PA_2R = 80° - \angle RA_2A_1 = 60°$, woraus folgt, dass das Dreieck gleichseitig ist, womit auch $A_2R = RP$ gilt.
Nun ist aber das Dreieck ΔA_2RQ gleichschenklig, denn
$\angle A_2RQ = 180° - 80° = 100°$ und
$\angle QA_2R = 80° - \angle RA_2A_1 - \angle PA_2Q = 40°$,
woraus $\angle RQA_2 = 40°$ folgt.
Somit ist, wegen $RP = RQ$ (= A_1A_2), auch das Dreieck ΔPQR gleichschenklig, mit
$\angle PRQ = 180° - \angle A_1RA_2 - \angle A_2RP = 40°$ und $\angle RQP = \angle QPR = 70°$.
Der gesuchte Winkel $\angle MPQ$ lässt sich nun leicht berechnen: $\angle MPQ = 180° - 60° - 70° = 50°$.