Internationale Mathematik-Olympiade

# Auswahlwettbewerb zur IMO 1999

## Lösungen zur 1. Auswahlklausur

### Aufgabe 1

Von *n* abgeschlossenen Intervallen der Zahlengerade ist bekannt, dass sich je zwei dieser Intervalle stets überschneiden.
Man beweise, dass es eine reelle Zahl gibt, die in allen Intervallen enthalten ist.

#### Lösung

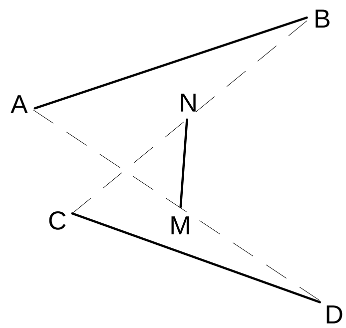
Ordnet man die Intervalle $I_i = [a_i, b_i]$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ so, dass $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, dann ist $a_n$ in allen Intervallen enthalten, da es andernfalls ein $b_j$ mit $j \in \{1, 2, ..., n\}$ geben würde das kleiner als $a_n$ wäre, was aber der Tatsache widerspricht, dass sich die Intervalle $I_n$ und $I_j$ überschneiden.
Ähnlich kann man mit $b_m = \min\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ argumentieren.

### Aufgabe 2

Gegeben sind zwei Strecken *AB* und *CD* (nicht zwingend in einer Ebene) mit der gleichen Länge 2k. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von *AD* und *BC* hat die Länge *k*.
Man berechne den Winkel der Geraden *(AB)* und *(CD)*.

#### Lösung

Sind M und N die Mittelpunkte der Strecken AD und BC, dann gilt: $2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$
und damit: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + 2 \cdot \overrightarrow{NM} = \vec{0}$
Die Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ und $2 \cdot \overrightarrow{NM}$ können demnach so parallel verschoben werden, dass sie ein Dreieck begrenzen, das wegen $|AB| = |DC| = |2NM|$ gleichseitig ist.
Der Winkel der Geraden AB und CD ist folglich $60^o$.




### Aufgabe 3

Adele stellt fest, dass die um 1 vergrößerte Summe der Quadrate zweier von ihr gewählten positiven ganzen Zahlen durch deren Produkt teilbar ist.
Reichen diese Angaben zur Ermittlung des Quotienten? Die Antwort ist zu begründen!

#### Lösung

Sind a und b die von Adele gewählten positiven ganzen Zahlen, dann gilt:

$$(*) \quad a^2 + b^2 + 1 = qab$$

wobei q der von Adele berechnete Quotient ist.

Aus $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ folgt $q = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} \geq 2 + \frac{1}{ab} > 2$, also $q \geq 3$.

Für $a = b$ ergibt sich $2a^2 + 1 = qa^2$ also $1 = (q-2)a^2$, was hier nur für $q = 3$ (und damit $a = b = 1$) erfüllbar ist.
Ist $a = 1$, dann führt das zu $b^2 - qb + 2 = 0$. Sollte diese Gleichung natürliche Lösungen in b und q haben, dann ist $q^2 - 8$ das Quadrat einer ganzen Zahl, was nur für $q = 3$ möglich ist und folglich $b \in \{1, 2\}$.
Ist $b = 2$, dann führt das zu $a^2 - 2qa + 5 = 0$ mit der natürlichen Lösung $q = 3$ und damit $a \in \{1,5\}$, was man ähnlich wie oben (Diskriminante = Quadratzahl, etc) begründen kann.
Sollte es Lösungen mit $q > 3$ geben, dann ist einerseits $a \neq b$ (s.o.) und andrerseits $b \geq 3$.