

## Auswahlwettbewerb zur IMO 2001

### Lösungen zur 2. Auswahlklausur

#### Aufgabe 1

Gegeben seien positive ganze Zahlen  $a, b, c$  mit der Eigenschaft  $b > 2a$  und  $c > 2b$ .

Man zeige, dass es dann stets eine reelle Zahl  $r$  mit folgender Eigenschaft gibt:

Die gebrochenen Teile der Zahlen  $ra, rb, rc$  liegen alle im Intervall  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ .

(Hinweis: Der gebrochene Teil einer Zahl ist die Differenz zwischen der Zahl und ihrem ganzen Teil.)

#### Lösung

Die Behauptung ist äquivalent zur Existenz dreier ganzer Zahlen  $x, y$  und  $z$  mit der Eigenschaft  $x + \frac{1}{3} < ra \leq x + \frac{2}{3}$ ,  $y + \frac{1}{3} < rb \leq y + \frac{2}{3}$ ,  $z + \frac{1}{3} < rc \leq z + \frac{2}{3}$ , bzw.

$\frac{3x+1}{3a} < r \leq \frac{3x+2}{3a}$ ,  $\frac{3y+1}{3b} < r \leq \frac{3y+2}{3b}$ ,  $\frac{3z+1}{3c} < r \leq \frac{3z+2}{3c}$ . Das dritte Intervall  $I_c$  für  $r$

hat die Breite  $\frac{1}{3c}$  und zwei aufeinanderfolgende Intervalle  $I_c$  haben den Abstand  $\frac{2}{3c}$ .

Wegen  $c > 2b$  gilt  $\frac{2}{3c} < \frac{1}{3b}$ ; daher liegt in jedem Intervall  $I_b$  der Breite  $\frac{1}{3b}$  wenigstens ein Punkt aus einem Intervall  $I_c$ .

Nun zeigen wir, dass es ein Intervall  $I_b$  gibt, welches ganz in einem Intervall  $I_a$  enthalten ist. Damit besitzen für geeignete  $x, y$  und  $z$  alle Intervalle einen gemeinsamen Punkt und die Behauptung ist erfüllt. Hinreichend für  $I_b \subset I_a$  ist die Gültigkeit von

$\frac{3x+1}{3a} < \frac{3y+1}{3b}$  und  $\frac{3y+2}{3b} \leq \frac{3x+2}{3a}$  für geeignete ganze Zahlen  $x, y$ . Umformen der

beiden Bedingungen liefert  $\frac{3x+1}{3y+1} < \frac{a}{b} \leq \frac{3x+2}{3y+2}$  für  $\frac{a}{b} < \frac{1}{2}$  (denn es ist ja  $b > 2a$ ). Die

folgende Intervallkette liefert offensichtlich eine Zerlegung von  $]0; \frac{1}{2}[$ , und die Zähler und Nenner haben die verlangte Form. Daher ist jeder Bruch  $\frac{a}{b} < \frac{1}{2}$  in einem der Intervalle enthalten:

$\dots, \left[\frac{1}{25}, \frac{2}{26}\right], \left[\frac{1}{13}, \frac{2}{14}\right], \left[\frac{1}{7}, \frac{2}{8}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{4}{10}, \frac{5}{11}\right], \left[\frac{10}{22}, \frac{11}{23}\right], \left[\frac{22}{46}, \frac{23}{47}\right], \dots$

#### Aufgabe 2

Wir betrachten zwei Kreise in der Ebene, welche sich in den beiden verschiedenen Punkten  $X$  und  $Y$  schneiden.

Man beweise, dass es in dieser Ebene vier feste Punkte mit folgender Eigenschaft gibt: Für jeden Kreis, der im Durchschnitt der beiden gegebenen Kreise liegt und diese in den Punkten  $A$  und  $B$  berührt sowie die Gerade  $XY$  in den Punkten  $C$  und  $D$  schneidet, geht jede der Geraden  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$  und  $BD$  durch einen dieser vier Punkte.

#### Lösung

Die vier Punkte sind die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an die zwei gegebenen Kreise.

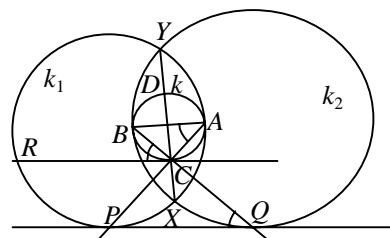
Da die Zweikreisfigur achsensymmetrisch ist, reicht die Betrachtung von  $AC$  und  $BC$  aus. Der innere Kreis sei mit  $k$  bezeichnet und berühre  $k_1$  in  $A$  sowie  $k_2$  in  $B$ . Die Gerade  $AC$  schneide  $k_1$  ein zweites Mal in  $P$  und die Gerade  $BC$  schneide  $k_2$  ein zweites Mal in  $Q$ .

Weil  $C$  auf der gemeinsamen Sehne  $\overline{XY}$  liegt, liefert zweimalige Anwendung des Sehnensatzes:  $|CA| \cdot |CP| = |CX| \cdot |CY| = |CB| \cdot |CQ|$ . Die Dreiecke  $CAB$  und  $CQP$  sind also ähnlich und daher ist  $\angle BAC = \angle CQP$ .

Wir zeichnen die Tangente an  $k$  in  $C$  und bezeichnen zur Orientierung ihren Schnittpunkt mit  $k_1$ , der außerhalb  $k_2$  liegt, mit  $R$ . Der Sehnens-Tangentensatz liefert

$\angle BCR = \angle BAC = \angle CQP$  und daher  $CR \parallel PQ$  (gleiche Stufenwinkel).

Eine zentrische Streckung an  $A$  bildet  $k$  auf  $k_1$  und damit  $C$  auf  $P$  ab, eine andere zentrische Streckung an  $B$   $k$  auf  $k_2$  und damit  $C$  auf  $Q$ . Bei beiden Abbildungen wird  $CR$  zur jeweiligen Tangente. Da  $CR$  und  $PQ$  parallel sind, ist  $PQ$  die gemeinsame Tangente an beide Kreise.



### Aufgabe 3

Für jede positive ganze Zahl  $n$  bezeichne  $d(n)$  die Anzahl aller positiver Teiler von  $n$ . (Beispiele:  $d(2) = 2$ ,  $d(6) = 4$ ,  $d(9) = 3$ .)

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen  $n$  mit der Eigenschaft  $(d(n))^3 = 4n$ .

### Lösung

Genau die Zahlen 2, 128 und 2000 besitzen die für  $n$  verlangte Eigenschaft.

Begründung: Wenn eine dritte Potenz durch 4 teilbar ist, muss sie auch durch 8 teilbar sein. Daher besitzt  $n$  die Darstellung  $n = 2k^3$  (\*) und es folgt  $d(2k^3) = 2k$  (\*\*). Aus der Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$  mit  $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_m$  folgt für die Anzahl der Teiler bekanntlich  $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_m + 1)$ . Wegen (\*) gilt  $a_1 = 3b_1 + 1$  sowie  $a_i = 3b_i$  für  $i = 2, 3, \dots, m$  mit natürlichen Zahlen  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Einsetzen in (\*\*) liefert  $(3b_1 + 2)(3b_2 + 1) \dots (3b_m + 1) = p_1^{b_1+1} p_2^{b_2} \dots p_m^{b_m}$  (\*\*\*)

Da in dieser Gleichung kein Faktor der linken Seite durch 3 teilbar ist, gilt  $p_2 \geq 5$ . Da links gleich viele Klammern wie rechts Potenzen stehen, können wir paarweise vergleichen. Für  $i \geq 2$  und  $b_i > 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, m$ , ist mithilfe der Ungleichung von Bernoulli  $p_i^{b_i} \geq 5^{b_i} = (1 + 4)^{b_i} > 1 + 4b_i > 3b_i + 1$ . Lediglich für  $b_i = 0$  ist  $p_i^{b_i} = 3b_i + 1 = 1$ .

Nun betrachten wir noch die jeweils ersten Faktoren: Mit  $p_1 = 2$  gilt  $3b_1 + 2 = 2^{b_1+1}$  genau für  $b_1 = 0$  und  $b_1 = 2$ . Da der Term  $3b_1 + 2$  als Gerade und der Term  $2^{b_1+1}$  als Graph einer Exponentialfunktion gedeutet werden können, gibt es höchstens zwei Lösungen. Diese sind genau dann Lösungen von (\*\*\*), wenn  $b_i = 0$  ist für  $i = 2, 3, \dots, m$ . Es ergibt sich  $n = 2^1 = 2$  sowie  $n = 2^{3 \cdot 2 + 1} = 128$ .

Für  $b_1 > 2$  ist auch  $2^{b_1+1} > 3b_1 + 2$ , und (\*\*\*) kann keine weiteren Lösungen mehr haben.

Für  $b_1 = 1$  wird (\*\*\*) zu  $5(3b_2 + 1) \dots (3b_m + 1) = 4p_2^{b_2} \dots p_m^{b_m}$ , so dass alleine  $p_2 = 5$  mit  $b_2 = 1$  und  $b_i = 0$  für  $i = 3, \dots, m$  noch eine Lösung liefert, nämlich  $n = 2^{3 \cdot 1 + 1} \cdot 5^{3 \cdot 1} = 2000$ .

Die Probe bestätigt, dass die drei gefundenen Zahlen tatsächlich die verlangte Eigenschaft haben.