Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 1999

Lösungen zur 2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Es seien *x*, *y* und *z* reelle Zahlen mit den Eigenschaften
(1) $x + y + z = 11$ und
(2) $xy + yz + zx = 10$.
Man bestimme den größten Wert, den eine der drei Zahlen annehmen kann.

Lösung

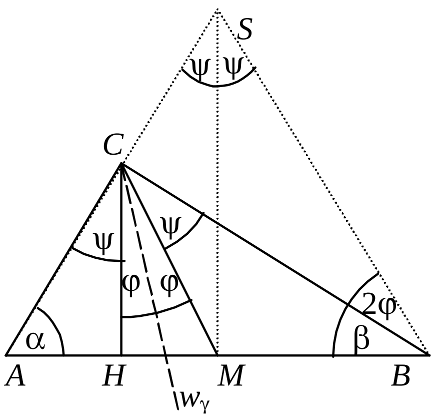
Aus den gegebenen Gleichungen folgt durch Quadrieren der ersten und Subtrahieren des Doppelten der zweiten: (3) $x^2 + y^2 + z^2 = 101$. Aus (1) folgt auch: (4) $y + z = 11 - x$, und aus (3) folgt: (5) $y^2 + z^2 = 101 - x^2$. Quadrieren von (4) und Subtrahieren von (5) liefert nach Multiplikation mit 2: (6) $4yz = 4x^2 - 44x + 40$. Ebenso liefert Quadrieren von (4) und Subtrahieren von (6) die Beziehung
$(y-z)^2 = -3x^2 + 22x + 81 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(y-z)^2 = (x - \frac{11}{3})^2 - \frac{364}{9}$ (7). Wäre nun $x > \frac{1}{3}(11 + \sqrt{364})$, so wäre $(x - \frac{11}{3})^2 > \frac{364}{9}$, und die rechte Seite von (7) wäre positiv – Widerspruch, denn $-\frac{1}{3}(y-z)^2$ kann nicht positiv sein. Also gilt $x \le \frac{1}{3}(11 + \sqrt{364})$.
Dies ist tatsächlich der größte Wert, den eine der drei Zahlen annehmen kann. Denn die gegebenen Gleichungen sind symmetrisch in *x*, *y* und *z*, so dass die gefundene Schranke auch für *y* und *z* gilt. Andererseits erfüllt das Tripel (x, y, z) mit
$x = \frac{1}{3}(11 + \sqrt{364}) = \frac{1}{3}(11 + 2\sqrt{91})$, $y = z = \frac{1}{3}(11 - \sqrt{91})$ die gegebenen Gleichungen, was durch Einsetzen bestätigt wird.

Anmerkung: Die weitere Lösung zeigt , dass die durch (3) suggerierte Schranke $\sqrt{101}$ zu groß ist. Aus $x = \sqrt{101}$ würde ja $y = z = 0$ folgen, was (1) und (2) widerspricht. Ebenso ist das Tripel $(10,1,0)$ nicht optimal, welches häufig mit der aus (1) und (2) abgeleiteten Gleichung $(x-1)(y-1) = xyz$ untersucht wurde.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein nicht-gleichschenkliges Dreieck *ABC*. Seine Winkelhalbierende w_γ soll gleichzeitig den Winkel zwischen der Höhe h_c und der Seitenhalbierenden s_c halbieren. Man beweise, dass dann das Dreieck *ABC* rechtwinklig ist.

Lösung



Weil *ABC* nicht gleichschenklig ist, können h_c und s_c nicht zusammenfallen; daher sind sie voneinander und nach Voraussetzung auch von w_γ verschieden. Sei nun oBdA $\alpha > \beta$. Im Dreieck *ACH* gilt (siehe Figur): $\alpha = 90° - \psi$. Ebenso gilt in *BHC*: $\beta = 90° - 2\varphi - \psi$. Zusammen folgt: $\alpha = \beta + 2\varphi$. Der freie Schenkel des Winkels $\beta + 2\varphi$, angetragen an *AB* in *B*, schneidet die Verlängerung von *AC* in *S* und bildet so das gleichschenklige Dreieck *ABS*, dessen Höhenfußpunkt von *S* auf *AB* daher der Mittelpunkt *M* von *AB* ist. Als Stufenwinkel ist $\angle ASM = \angle ACH = \psi$ und daher auch

$\angle MSB = \psi$. Mit $\gamma = \angle ACB$ gilt im Dreieck *BSC*: $180° - \gamma = 2\psi + 2\varphi$, und im Dreieck *ABC*: $\gamma = 2\psi + 2\varphi$. Daraus folgt aber $180° - \gamma = \gamma$ und somit $\gamma = 90°$. Also ist *ABC* bei *C* rechtwinklig.

Anmerkung: Diese Aufgabe ließ viele weitere Lösungsansätze, z.B. über Umfangswinkel, analytische Geometrie, Sinus- und Kosinussatz zu.

Aufgabe 3

Es ist zu beweisen, dass genau eine Folge ganzer Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ existiert, so dass $a_1 = 1$, $a_2 > 1$ ist und für alle n ≥ 1 gilt: $a_{n+1}^3 + 1 = a_n \cdot a_{n+2}$.

Lösung

Für $n = 1$ liefert die Rekursion $a_3 = a_2^3 + 1$, und wegen $a_2 > 1$ gilt wohldefiniert

$a_4 = \dfrac{a_3^3 + 1}{a_2} = \dfrac{a_2^9 + 3a_2^6 + 3a_2^3 + 2}{a_2} = a_2^8 + 3a_2^5 + 3a_2^2 + \dfrac{2}{a_2}$. Wenn a_4 ganzzahlig sein soll, so ist dies nach Voraussetzung nur mit $a_2 = 2$ möglich. Weil durch zwei aufeinanderfolgende Glieder die weiteren Zahlen in der rekursiven Folge eindeutig bestimmt sind, kann es daher höchstens eine solche Folge geben.

Die Existenz einer solchen Folge ist aber erst nachgewiesen, wenn wir gezeigt haben, dass für $a_2 = 2$ alle weiteren Glieder ebenfalls ganzzahlig sind. Dies beweisen wir mit vollständiger Induktion. Vorher bemerken wir noch zwei Eigenschaften der Folge:

1.) Mit a_1 und a_2 sind alle Folgenglieder positiv. Dies folgt direkt aus $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2 + 1}{a_n}$.

2.) Aus der gegebenen Rekursion folgt: $a_{n-1} \cdot a_{n+1} - a_n^3 = 1$. Dies bedeutet, dass jeder gemeinsame Teiler von a_{n-1} und a_n auch Teiler von 1 ist, d.h. die Zahlen a_{n-1} und a_n sind, wenn sie ganz sind, stets teilerfremd.

Induktionsverankerung: Wir berechnen weiter $a_3 = 9$ und $a_4 = 365$, beides ganze Zahlen.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen sind. Dann ist $a_{n+1} = \dfrac{a_n^3 + 1}{a_{n-1}}$ ganzzahlig, wenn $a_n^3 + 1 \equiv 0 \pmod{a_{n-1}}$ gilt. Wegen $a_n = \dfrac{a_{n-1}^3 + 1}{a_{n-2}}$ und der Ganzzahligkeit ist zu zeigen, dass (*) $\left(\dfrac{a_{n-1}^3 + 1}{a_{n-2}}\right)^3 + 1 \equiv 0 \pmod{a_{n-1}}$ gilt.

Unter Berücksichtigung der Teilerfremdheit von a_{n-2} und a_{n-1} lässt sich (*) umformen:

(*) $\Leftrightarrow (a_{n-1}^3 + 1)^3 + a_{n-2}^3 \equiv 0 \pmod{a_{n-1}} \Leftrightarrow (0+1)^3 + a_{n-2}^3 \equiv 1 + a_{n-2}^3 \equiv 0 \pmod{a_{n-1}}$. Die letzte Kongruenz ist aber in der Tat erfüllt, denn es gilt $a_{n-1} = \dfrac{a_{n-2}^3 + 1}{a_{n-3}} \Leftrightarrow a_{n-3} = \dfrac{a_{n-2}^3 + 1}{a_{n-1}}$, und da nach Induktionsannahme a_{n-3} ganzzahlig sein soll, folgt die Teilbarkeit von $a_{n-2}^3 + 1$ durch a_{n-1}. Damit ist die Ganzzahligkeit von a_{n+1} durch vollständige Induktion bewiesen.